УДК 517.9

На правах рукописи

Мещерякова Юлия Игоревна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РОСТКОВ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2004

Работа выполнена в Челябинском государственном университете на кафедре математического анализа.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Воронин Сергей Михайлович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Долгий Юрий Филиппович

кандидат физико-математических наук,
доцент Елизаров Павел Михайлович

Ведущая организация:
Воронежский государственный университет

Защита состоится "16" июня 2004 года в 13 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу:
620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, а. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан "6" мая 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических
наук, профессор В.Г. Пименов

Актуальность темы. Основы теории нормальных форм были заложены А. Пуанкаре еще в конце 19 века. Значительный вклад в развитие этой теории внесли Х. Дюлак, К. Зигель, К. Чень, Ф. Такенс, В.А. Кондратьев, В.С. Самовол, Г.Р. Белицкий, Г. Селл, В.И. Арнольд, А.Д. Брюно, Ю.С. Ильяшенко, А.С. Пяртли и др.

Вопросы нормализации вещественных полей и отображений на инвариантном многообразии рассматривались в работах Ж. Адамара, О. Перрона, В.А. Плисса, М. Хирша, К. Пью, М. Шуба, Ф. Дюмортье, Ю.Н. Бибикова, В.Ф. Лазуткина.

Как правило, в задачах аналитической классификации получали результаты двух типов: либо доказывали совпадение аналитической и формальной классификаций, либо находили условия, гарантирующие расходимость нормализующих рядов. Результаты принципиально иного характера были получены за последние 24 года. В 1980 г. в задаче об аналитической классификации ростков одномерных отображений с тождественной линейной частью были обнаружены функциональные инварианты (Ж. Экалль, С.М. Воронин). В дальнейшем функциональные инварианты были построены для ростков резонансных одномерных отображений, а также в задаче об орбитальной[1] классификации резонансных особых точек голоморфных векторных полей на комплексной плоскости (Ж. Экалль, Б. Мальгранж, Ж. Мартине, Ж.-П. Рамис, Ю.С. Ильяшенко, С.М. Воронин, П.М. Елизаров, А.А. Щербаков, А.А. Гринчий).

Цель работы. Целью работы является построение полной системы инвариантов в задаче об аналитической классификации вырожденных элементарных (седло-узловых) особых точек на комплексной плоскости.

[1]Динамические системы-1. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т.1.-М.:ВИНИТИ, 1985.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод, который условно можно назвать методом *„нормализующих атласов“*. Состоит он в том, что нормализация исследуемого объекта проводится там, где ее удается провести. Построенный набор нормализующих отображений образует так называемый нормализующий атлас на некотором многообразии (области). Суть метода состоит в том, что функции перехода этого атласа обычно и дают список инвариантов аналитической классификации. Метод нормализующих атласов использовался ранее в работах Экалля, Мартине, Рамиса, Ильяшенко, Воронина, Гринчий и др.

Кроме того, в работе использовались: *теорема о сжимающих отображениях* и метод конструирования аналитических объектов, основанный на использовании техники *почти комплексных структур*.

Новизна полученных результатов. В работе получены следующие результаты:

- доказана теорема о секториальной нормализации седлоузловых особых точек;

- получена аналитическая классификация таких точек: она не совпадает с формальной и имеет функциональные модули;

- получено полное описание аналитической группы симметрий, найдены достаточные условия аналитической эквивалентности ростка седло-узлового векторного поля и его формальной нормальной формы.

Все результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Существенность полученных результатов заключается в том, что они позволяют почти полностью завершить так называемую „программу Пуанкаре“ исследования особых точек векторных полей на плоскости: не до конца исследованными теперь остаются лишь седловые особые точки с „плохим“ отношением собственных значений линейной части. Полученные результаты могут найти применение во всех аналитических задачах теории динамических систем, в которых возникают вырожденные элементарные особые точки. Кроме того, данные результаты могут быть использованы для чтения спецкурсов по теории динамических систем в университетах.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертационной работе, были представлены на Воронежской зимней математической школе „Современные методы в теории краевых задач“ (Воронеж, 1999г.), Всероссийской научно-практической конференции „Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе“ (Магнитогорск, 1999г.), Воронежской зимней математической школе „Современный анализ и его приложения“ (Воронеж, 2000г.), Четвертом сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000) (Новосибирск, 2000г.), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2000г.), Международной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели“ (Челябинск, 2002г.), Всеросссийской конференции „Алгоритмический анализ неустойчивых задач“ (Екатеринбург, 2004г.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приводится в конце автореферата. Результаты, опубликованные в совместных с научным руководителем работах, получены автором самостоятельно; соавтору принадлежит постановка задачи и основное направление исследования.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка цитируемой литературы.

Объем диссертации составляет 104 страницы. Библиография содержит 100 наименований работ российских и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор литературы по теме диссертации. Здесь же обозначены цели и методы исследования, дается представление о содержании диссертации, приносятся благодарности научному руководителю, коллективу кафедры математического анализа ЧелГУ, супругу и родителям автора.

Кроме того, во введении даны основные определения, используемые в диссертации:

Ростком векторного поля (отображения) в точке 0 называется класс всех векторных полей (отображений), совпадающих с ним в некоторой (зависящей от поля) окрестности этой точки.

Пусть $\mathcal{V}$ — класс ростков голоморфных векторных полей в $(\mathbb{C}^2, 0)$ с изолированной вырожденной элементарной особой точкой 0 (т.е. таких, что линейная часть ростка в этой точке вырождена, но хотя бы одно собственное значение линейной части поля в этой точке отлично от нуля).

Два ростка векторных полей v и $\tilde{v}$ в точке 0 называются *аналитически (формально) эквивалентными*, если существует росток в точке 0 аналитической замены координат H, переводящий интегральные кривые поля v в интегральные кривые поля $\tilde{v}$ (если существует формальная замена координат H, такая, что $H'v = \tilde{v} \circ H$).

Ростки v и $\tilde{v}$ называются *орбитально аналитически (формально) эквивалентными*, если существует локальная голоморфная замена координат, переводящая фазовый портрет одного ростка в фазовый портрет другого (если существует формальная замена координат H и формальный степенной ряд k с ненулевым свободным членом такие, что $H' \cdot v = k \cdot \tilde{v} \circ H$).

Первая глава посвящена исследованию формальной классификации вырожденных элементарных особых точек в $(\mathbb{C}^2, 0)$. Известно[2], что росток из $\mathcal{V}$ формально орбитально эквивалентен одному из ростков вида

$$v_{p,\lambda} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^{p+1}}{1+\lambda y^p}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Обозначим через $\mathcal{V}_{p,\lambda}$ — класс ростков, формально орбитально эквивалентных $v_{p,\lambda}$.

Следующая теорема, по существу, равносильна результатам А.Д. Брюно (для двумерного случая), но дает более удобную для наших целей формальную нормальную форму седло-узловых особых точек.

Теорема 1 (о формальной классификации). *Каждый росток из $V_{p,\lambda}$ формально эквивалентен одному из ростков*

$$v_{p,\lambda,a} = v_{p,\lambda} \cdot a(y),$$

где $a(y) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k y^k,\ a_0 \neq 0,\ a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, p.$

Параграф 1.1 посвящен доказательству теоремы о формальной классификации. Класс формальной эквивалентности ростка $v_{p,\lambda,a}$, называемого формальной нормальной формой, обозначим $\mathcal{V}_{p,\lambda,a}$.

[2]Martinet J., Ramis J.P. Probléme de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci., **55**, 1982.

Определение 1. Будем говорить, что наборы $\mu = (p, \lambda, a)$ и $\tilde{\mu} = (\tilde{p}, \tilde{\lambda}, \tilde{a})$ эквивалентны, если $p = \tilde{p}, \lambda = \tilde{\lambda}$, наборы $a = (a_0, \ldots, a_p)$ и $\tilde{a} = (\tilde{a_0}, \ldots, \tilde{a_p})$ удовлетворяют условию $a_k = \tilde{a_k}\epsilon_p^k, k = 0, \ldots, p$, где ϵ_p — некоторый корень степени p из единицы.

Теорема 2. *Две формальные нормальные формы v_μ и $v_{\tilde{\mu}}$ формально эквивалентны тогда и только тогда, когда μ эквивалентно $\tilde{\mu}$.*

Доказательство теоремы 2 приведено в параграфе 1.2. В параграфе 1.3 доказана следующая

Лемма 1 (о предварительной нормализации). *Для любого $v \in \mathcal{V}_{p,\lambda}$ и любого $N \in \mathbb{N}$ существует росток $\tilde{v}$, такой, что v аналитически эквивалентен $\tilde{v}$ и*

$$\tilde{v} = \left(x\sum_{k=0}^{p} a_k y^k + y^N\varphi(x,y)\right)\tfrac{\partial}{\partial x} + \left(\tfrac{y^{p+1}}{1+\lambda y^p}\sum_{k=0}^{p} a_k y^k + y^{N+1}\psi(x,y)\right)\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad (*)$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – голоморфные в $(\mathbb{C}^2, 0)$ функции.

Через $\mathcal{V}^N_{p,\lambda,a}$ обозначим класс ростков из $\mathcal{V}_{p,\lambda,a}$ вида $(*)$.

Пусть $\alpha \in (\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{p})$. Для $j \in \mathbb{N}$ $(1 \leq j \leq 2p)$ рассмотрим области $\Omega_j = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \varepsilon,\ 0 < |y| < \varepsilon,\ |\arg y + \frac{\pi}{2p} - \frac{\pi j}{p}| < \alpha\}$. Систему областей $\{\Omega_j\}$ $(j = 1, \ldots, 2p)$ будем называть *хорошим покрытием* области $\{|x| < \varepsilon, 0 < |y| < \varepsilon\}$; параметры α и ε будем называть, соответственно, *раствором* и *радиусом* хорошего покрытия.

Определение 2. Пусть U — окрестность нуля в $\mathbb{C}$, $S \subset \mathbb{C}$ — сектор конечного радиуса с вершиной в нуле. Область $\Omega = U \times S$ будем называть *секториальной областью.* Полуформальное отображение $\hat{H} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)y^k$ с голоморфными в U коэффициентами будем называть *асимптотическим* для голоморфного отображения $H : \Omega \to \mathbb{C}^2$ на секториальной области $\Omega = U \times S$, если для любой частичной суммы $H_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)y^k$ имеем:

$$H(x,y) - H_n(x,y) = o(y^n) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \Omega, \quad y \to 0.$$

Теорема 3 (о секториальной нормализации). *Для любого ростка $v \in \mathcal{V}^N_{p,\lambda,a}$ и любого хорошего покрытия $\Omega = \{\Omega_j\}$ с заданным раствором и достаточно малым радиусом существует единственный набор голоморфных отображений $H_j : \Omega_j \to H_j(\Omega_j) \subset \mathbb{C}^2$, таких, что:*
1°. *H_j сопрягает на Ω_j росток v и его формальную нормальную форму $v_{p,\lambda,a}$:*

$$H_j' \cdot v_{p,\lambda,a} = v \circ H_j \ \text{ на } \ \Omega_j.$$

2°. *Нормированная формальная нормализующая замена $\hat{H}$ ростка v является асимптотической для H_j на Ω_j.*

Теорема о секториальной нормализации доказана во **второй главе**.

В параграфе 2.1 приводится полное доказательство для частного случая $p = 1, \lambda = 0, a_0 = 1, a_1 = 0$. Для общего случая несколько более компактное доказательство приведено в параграфе 2.2.

Отметим, что теорема о секториальной нормализации является обобщением аналогичной теоремы для орбитальной эквивалентности[3].

Третья глава содержит основной результат диссертационной работы, здесь доказана теорема об аналитической классификации ростков класса $\mathcal{V}_{p,\lambda,a}$ и построены функциональные инварианты данной классификации. Именно, здесь мы строим нормализующий атлас для ростка $v \in \mathcal{V}$ и определяем инварианты аналитической классификации ростка v по функциям перехода этого атласа.

Пусть $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ — пространство всех наборов (c, φ, ψ) таких, что $c \in \mathbb{C}^p$; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$, φ_j и ψ_j голоморфны в $(\mathbb{C}, 0)$; $\varphi_j(0) = \psi_j(0) = 0$, $\varphi_k'(0) = 1 \ \forall k < p$, $\varphi_p'(0) = \exp(2\pi i \lambda)$.

Пусть p_a – наибольший общий делитель p и всех тех $k \in \{1, \dots, p\}$, для которых $a_k \neq 0$, $n_a = p/p_a$. Два набора $(c,\ \varphi,\ \psi)$ и $(\tilde{c},\ \tilde{\varphi},\ \tilde{\psi})$ из $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ будем называть *эквивалентными*, если для некоторого $C \in \mathbb{C}^p_*$, $C = (C_1, \dots, C_p)$ и некоторого $s \in \mathbb{Z}$, $0 \le s < p_a$

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_{j+sn_a} = C_j \cdot c_j, \\ &\tilde{\varphi}_{j+sn_a}(z) \equiv C_{j+1+sn_a} \varphi_j(C_j^{-1} z), \\ &\tilde{\psi}_{j+sn_a}(z) = \psi_j(C_j^{-1} z) \end{aligned} \tag{1}$$

(нумерацию считаем циклической). Пусть $M_{p,\lambda,a}$ — пространство классов эквивалентности из $\mathcal{M}_{p,\lambda}$.

Теорема 4 (об аналитической классификации). *Существует такое отображение*

$$m : \mathcal{V}_{p,\lambda,a} \to M_{p,\lambda,a}, \quad m : v \mapsto m_v,$$

[3] Hukuhara H., Kimura T., Matuda T. Equations differentialles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe. Publ. Math. Soc. of Japan, 1961.

что справедливы следующие утверждения:

1°. Эквивалентность и эквимодальность. $v \sim \tilde{v} \Leftrightarrow m_v = m_{\tilde{v}}$*;*

2°. Реализация. *Для любого* $m \in M_{p,\lambda,a}$ *существует такое* $v \in \mathcal{V}_{p,\lambda,a}$*, что* $m = m_v$*;*

3°. Аналитическая зависимость. *Для любого аналитического семейства* v_ε *ростков из* $\mathcal{V}_{p,\lambda,a}$ *некоторые представители* μ_ε *модулей* m_{v_ε} *также образуют аналитическое семейство.*

Эта теорема является точным аналогом известной теоремы об орбитальной аналитической классификации ростков из $\mathcal{V}_{p,\lambda}$. Отметим, что количество модулей в задаче об аналитической классификации увеличилось вдвое по сравнению с задачей об орбитальной аналитической классификации. Действительно, орбитальная аналитическая классификация имеет $p+1$ числовых (один формальный модуль λ и p модулей $c = (c_1, \ldots, c_p)$ аналитической классификации), и p функциональных модулей $\{\varphi_j\}$; аналитическая классификация имеет $2p+2$ числовых ($p+2$ формальных модулей $\lambda, a_0, \ldots, a_p$ и p аналитических модулей набора c), и $2p$ функциональных модулей $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$.

Все три утверждения теоремы 4, для краткости, заменим одной фразой: „Пространство $M_{p,\lambda,a}$ является пространством модулей аналитической классификации ростков класса $\mathcal{V}^N_{p,\lambda,a}$“.

Наряду с аналитической эквивалентностью здесь рассматривается и строгая эквивалентность.

Определение 3. Ростки $v, \tilde{v} \in \mathcal{V}^N_{p,\lambda,a}$ назовем *строго эквивалентными*, если они эквивалентны, причем сопрягающая

их замена координат имеет вид

$$H(x, y) = (x + o(1), y + o(y^{p+1})).$$

Замечание 1. Строгая эквивалентность удобнее эквивалентности в силу единственности формальной нормализующей замены. Каждый росток из $\mathcal{V}^N_{p,\lambda,a}$ не только формально эквивалентен своей формальной нормальной форме $v_{p,\lambda,a}$, но и строго формально эквивалентен ей.

Тогда имеет место следующая

Теорема 5. *Пространство* $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ *является пространством модулей строгой аналитической классификации ростков класса* $\mathcal{V}^N_{p,\lambda,a}$*.*

Отмеченная выше неединственность нормализующей замены в задаче об аналитической классификации объясняет взаимосвязь пространств $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ и $M_{p,\lambda,a}$: пространство $M_{p,\lambda,a}$ получается из пространства $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ факторизацией по отношению эквивалентности (1), происходящему из этой неединственности.

Четвертая глава — приложения теории нормальных форм.

Определение 4. *Аналитической (формальной) группой симметрий* ростка $v \in \mathcal{V}$ назовем группу G_v ($\tilde{G}_v$), состоящую из всех голоморфных (формальных) замен координат, сохраняющих v.

Группа симметрий любого ростка v содержит подгруппу $G^+_v = \{g^t_v\}_{t\in\mathbb{C}}$, состоящую из всех сдвигов вдоль фазовых кривых ростка v за фиксированное время.

Фактор-группу G_v/G_v^+ (если она корректно определена) назовем *главной частью группы симметрий ростка* v.

Группой симметрий инварианта $m \in M_{p,\lambda,a}$ назовем подгруппу $\mathbb{C}_*^p \times \mathbb{Z}_{p_a}$ (где p_a – наибольший общий делитель p и всех тех индексов k, для которых $a_k \neq 0$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_p)$), состоящую из всех чисел $(C, s) \in \mathbb{C}_*^p \times \mathbb{Z}_{p_a}$ таких, что для некоторого представителя $\{c, \varphi, \psi\}$ инварианта m справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&c_j = C_j^{-1} \cdot c_{j+sn_a},\\
&\varphi_j(C_j^{-1} z) \equiv C_{j+1+sn_a}^{-1} \varphi_{j+sn_a}(z),\\
&\psi_j(C_j^{-1} z) \equiv \psi_{j+sn_a}(z).
\end{aligned}$$

Теорема 6. *1. Формальная группа симметрий ростка класса $V_{p,\lambda,a}$ изоморфна прямому произведению мультипликативной группы $\mathbb{C}_*$, аддитивной группы $\mathbb{C}$ и группы вычетов $\mathbb{Z}_{p_a}$.*
2. Главная часть аналитической группы симметрий ростка $v \in V_{p,\lambda}$ изоморфна группе симметрий его инварианта.

Следствием данной теоремы является следующее достаточное условие аналитической эквивалентности седло - узловой особой точки ростка голоморфного векторного поля и его формальной нормальной формы.

Следствие 1. *Если главная часть аналитической группы симметрий ростка v из $\mathcal{V}_{p,\lambda,a}$ не является конечной, то росток v аналитически эквивалентен своей формальной нормальной форме $v_{p,\lambda,a}$.*

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Мещерякова Ю.И.* Формальные нормальные формы изолированных вырожденных элементарных особых точек // Деп. в ВИНИТИ №2848 - В98 от 23.03.1998г. 12 с.

2. *Мещерякова Ю.И.* Формальные нормальные формы изолированных вырожденных элементарных особых точек // Воронеж. зим. мат. школа "Современные методы в теории краевых задач"Тез. докл. Воронеж, 1999г.с. 136.

3. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей на С с типичными вырожденными особыми элементарными точками // Проблемы физ.-мат. образ. в пед. вузах России на совр. этапе: Матер. Всерос. научн.-практ. конф. Ч.2. Тез. докл. Магнитогорск: МГПИ, 1999г.

4. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Аналитическая классификация типичных вырожденных элементарных особых точек ростков голоморфных векторных полей в $(\mathbb{C}^2, 0)$ // Воронеж. зим. мат. школа "Современный анализ и его приложения"Тез. докл. Воронеж, 2000г., С. 60–61.

5. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Преобразования t-монодромии типичных вырожденных элементарных особых точек голоморфных векторных полей // Четв. сиб. конгресс по прикладн. и индустриальн. мат. (ИНПРИМ-2000), посвящ. пам. М.А. Лаврентьева. Тез. докл. Новосибирск, 2000г.

6. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Функциональные инварианты вырожденных элементарных особых точек голоморфных векторных полей в $(\mathbb{C}^2, 0)$ // Международн. конф. по диф. уравнениям и динамич. системам. Тез. докл. Суздаль, 2000г., С. 120–121.

7. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Аналитическая классификация типичных вырожденных элементарных особых точек ростков голоморфных векторных полей на комплексной плоскости // Известия вузов. Математика, 2002, №1, С. 13–16.

8. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Уголки Елизарова для одного класса вырожденных элементарных особых точек // Международн. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели"Тез. докл. Челябинск, 2002г., с. 22.

9. *Мещерякова Ю.И.* Симметрии ростков типичных вырожденных элементарных особых точек // Международн. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели"Тез. докл. Челябинск, 2002г., с. 70.

10. *Мещерякова Ю.И.* Формальная классификация вырожденных элементарных особых точек // Уравнения соболевского типа: Сб. науч. работ. Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 2002г., С. 197–206.

11. *Воронин С.М., Мещерякова Ю.И.* Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей с вырожденной элементарной особой точкой // Вестник Челябинского университета. Серия 3. Математика. Информатика. Механика. №3, 2003г., С. 16–41.

Подписано в печать 05.05.04. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 114. Бесплатно.

Челябинский государственный университет
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Полиграфический участок Издательского центра
Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б